Άσκηση 31 (Φυλ. 18)

Αυτοκίνητο (υλικό σημείο) κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας, r. Όταν το υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο A η γωνία είναι $\theta = 0$ και το μέτρο της ταχύτητας του είναι $|\vec{u}_A| = 5\ m/s$. Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται με ρυθμό $d|\vec{u}|/dt = kt$, με $k = 0.06\ m/s^3$.

Να υπολογιστούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης όταν το υλικό σημείο έχει διανύσει το $1/3$ της κυκλικής τροχιάς, (ακτίνα τροχιάς $r = 300\ m$).

Λύση

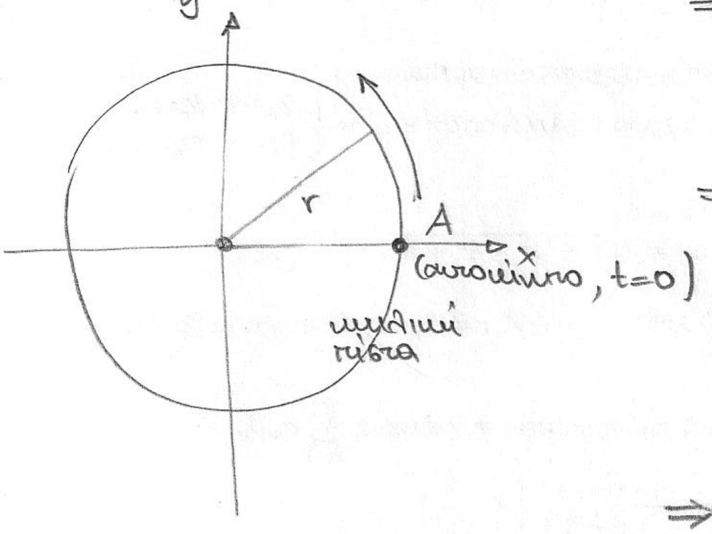
Γνωρίζουμε ότι $\alpha_{επιτρ.} = \frac{d}{dt}|\vec{u}| \Rightarrow \alpha_{επιτρ.} = kt \Rightarrow \frac{d|\vec{u}|}{dt} = kt \Rightarrow$

$\Rightarrow d|\vec{u}| = kt\,dt$ ①

Ολοκληρώνοντας την ① μπορώ να βρω την ταχύτητα του αυτοκινήτου

$$\int_{u_1}^{u} d|\vec{u}| = \int_{t_1}^{t} kt\,dt \Rightarrow |\vec{u}|\Big|_{u_1}^{u} = \int_{t_1}^{t} kt\,dt \Rightarrow |\vec{u}(t)| - |\vec{u}_1| = \frac{k}{2}t^2 - 0 \Rightarrow$$

όπου $u_1 = 5\ m/s$



$$\Rightarrow |\vec{u}(t)| = \frac{k}{2}t^2 + u_1 \quad ②$$

Γνωρίζουμε ότι: $|\vec{u}| = \frac{dS}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dS = |\vec{u}|\,dt \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int_{S_1=0}^{S} dS = \int_{t_1=0}^{t} \left(\frac{k}{2}t^2 + u_1\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(t) - S_1 = \frac{k}{6}t^3 + u_1 t - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{k}{6}t^3 + u_1 t + \cancel{S_1} \nearrow 0 \text{ για } t=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{k}{6}t^3 + u_1 t$$

Όταν το αυτοκίνητο έχει διανύσει το $\frac{1}{3}$ της κυκλικής τροχιάς δηλαδή $S_2 = \frac{2\pi r}{3}$, έστω ότι ο χρόνος είναι t_2

Δηλ. $\frac{2\pi r}{3} = \frac{k}{6}t_2^3 + u_1 t_2 \Rightarrow (*)$

$$(*) \Rightarrow \frac{k}{2} t_2^3 + 3u_1 t_2 - 2\pi r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.06}{2} t_2^3 + 3 \times 5 t_2 - 2 \times 3.14159 \times 300 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.03 t_2^3 + 15 t_2 - 1884.954 = 0 \Rightarrow \boxed{t_2 = 35.58 \text{ sec}}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι: $|\vec{u}(t_2)| = \frac{k}{2} t_2^2 + u_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{u}(t_2)| = \frac{0.06}{2} 35.58^2 + 5 \simeq 43 \text{ m/s}$$

Τέλος η επιτάχυνση $\alpha_{\text{επιτ}}(t_2) = k t_2 = 0.06 \; 35.58 = 2.13 \text{ m/s}^2$
αυτή η επιτάχυνση είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση, για να βρω το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης πρέπει:

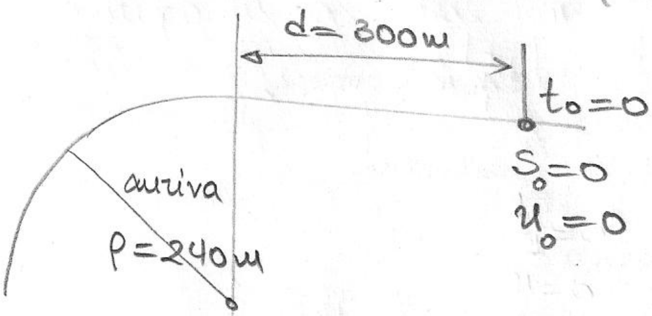
$$|\vec{\alpha}_{\text{ολική}}(t_2)| = \sqrt{\alpha^2_{\text{επιτ.}}(t_2) + \alpha^2_{\text{κεντρομ}}(t_2)} = \sqrt{4.54 + 37.95} \Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}_{\text{κεντρ.}}(t_2)| = \frac{|\vec{u}(t_2)|^2}{r_{\to \text{ακτίνα καμπυλότ.}}} = 6.16 \text{ m/s}^2 \quad \Bigg| \quad \Rightarrow |\vec{\alpha}_{\text{ολική}}(t_2)| = 6.52 \text{ m/s}^2$$

$\boxed{\text{Άσκηση 32}}$

Αυτοκίνητο (υλικό σημείο) είναι αρχικά ακίνητο όταν $S=0$, $(t_0=0)$. Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του είναι $d|\vec{u}|/dt = bt^2$, όπου $b = 0.05\ m/s^4$. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας και το μέτρο της επιτάχυνσης όταν $S = S_1 = 550\ m$.

Η κίνηση του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Λύση

Η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι $\alpha_{επ} = \frac{d|\vec{u}|}{dt} = bt^2 \Rightarrow d|\vec{u}| = bt^2 dt$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμ. διαφορική εξίσωση βρίσκω το μέτρο της ταχύτητας

$$\int_{u_0}^{u} d|\vec{u}| = \int_{t_0}^{t} bt^2 dt \Rightarrow \left(\text{θα γράφουμε ότι } |\vec{u}| = u\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \cancel{u_0}^{0} = \frac{b}{3}t^3 - \frac{b}{3}\cancel{t_0^3}^{0} \Rightarrow u = \frac{b}{3}t^3 \quad (1)$$

Από (1) ολοκληρώνοντας έχουμε: $\left(|\vec{u}| = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = |\vec{u}|dt\right)$

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_{t_0=0}^{t} \frac{b}{3}t^3 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S - \cancel{S_0}^{0} = \frac{b}{12}t^4 - \frac{b}{12}\cancel{t_0^4}^{0} \Rightarrow S = \frac{b}{12}t^4 \quad (2)$$

Το χρονικό διάστημα t που χρειάζεται το αυτοκίνητο να καλύψει τα 550 m προκύπτει από την (2) $\Rightarrow t_1 = \left(\frac{12 S_1}{b}\right)^{1/4} \Rightarrow t_1 = \left(\frac{12 \cdot 550}{0.05}\right)^{1/4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 \cong 19.06\ sec.}$$

(**)

Το μέτρο της ταχύτητας την χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$u_1 = \frac{b}{3} t_1^3 \Rightarrow u_1 = \frac{0.05}{3}(19.06)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = 115.4\ m/s}$$

Αφού τα $550m > d = 300m$ το αυτοκίνητο βρίσκεται στο καμπύλο μέρος της τροχιάς του. Στο καμπύλο μέρος της τροχιάς έχουμε δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης (την επιτρόχιο και την κεντρομόλο). Επομένως για να υπολογίσω το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης χρειάζομαι και τις δύο συνιστώσες $|\vec{\alpha}_{επιτρ}| = b t_1^2 = d|\vec{u}|/dt$ και $|\vec{\alpha}_{κεντρ}| = \frac{|\vec{u}(t_1)|^2}{\rho}$

Οπότε $|\vec{\alpha}_{επιτρ.}| = 0.05 \times (19.06)^2 = 18.16\ m/s^2$

από (1) $\Rightarrow |\vec{\alpha}_{κεντρ}| = \frac{(b t_1^3)^2}{3^2 \rho} = \frac{(0.05\,(19.06)^3)^2}{3^2\, 240} = \frac{(346.21)^2}{2160} = 55.5\ m/s^2$

Το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης είναι:

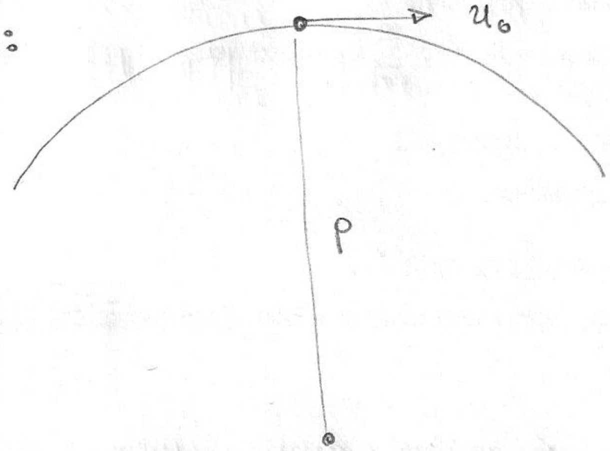
$$|\alpha_{ολική}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{επιτρ}^2 + \vec{\alpha}_{κεντρ}^2} = \sqrt{18.16^2 + 55.5^2} = 58.4\ m/s^2$$

$\boxed{\text{Άσκηση 33}}$ (Φυλ. 19)

Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας ρ. Το μέτρο της ταχύτητας του είναι $|u_0|, t=0$. Το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου αυξάνει σύμφωνα με τη σχέση $\frac{d|\vec{u}|}{dt} = bS,\ b>0$. Τη χρονική στιγμή $t=0,\ S=0$. Να υπολογιστούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης όταν το υλικό σημείο έχει κινηθεί απόσταση $S=10m$. Δίνονται: $\rho = 50m$, $u_0 = \dot{x}_0 = 4\ m/s$ και $b = 0.05\ 1/s^2$.

Λύση

Σχηματικά:



Από την άσκηση γνωρίζουμε ότι: $\frac{d|\vec{u}|}{dt} = bS$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με το dS. Οπότε:

$$\frac{d|\vec{u}|}{dt}dS = bS\,dS \Rightarrow \underbrace{\frac{d|\vec{u}|}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}}_{\text{κανόνας αλυσ.}}dS = bS\,dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d|\vec{u}|\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{|\vec{u}|} = bS\,dS \Rightarrow |\vec{u}|\,d|\vec{u}| = bS\,dS \text{ ολοκληρώνω} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{u_0}^{u_1}|\vec{u}|\,d|\vec{u}| = \int_{S_0=0}^{S_1} bS\,dS \Rightarrow \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} - \frac{|\vec{u}_0|^2}{2} = \frac{bS_1^2}{2} - \cancel{\frac{bS_0^2}{2}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} = \frac{bS_1^2}{2} + \frac{|\vec{u}_0|^2}{2} \Rightarrow |\vec{u}_1|^2 = bS_1^2 + |\vec{u}_0|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{bS_1^2 + |\vec{u}_0|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{0.05 \times 10^2 + 4^2} = \sqrt{5+16} = \sqrt{21} = 4.58\ m/s$$

οπότε $|\vec{u}_1| = 4.58\ m/s$.

Η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι: $\vec{\alpha}_{επιτρ} = \dfrac{d|\vec{u}|}{dt}\vec{\varepsilon}_0 \Rightarrow \vec{\alpha}_{επιτ} = b\,S\,\vec{\varepsilon}_0$.

Για $S_1 = 10m$: $\vec{\alpha}_{επιτρ} = 0.05 \times 10\, \vec{\varepsilon}_0 = 0.5\, \vec{\varepsilon}_0\ (m/s^2)$

η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $\vec{\alpha}_{κεντρ} = \dfrac{|\vec{u}_1|^2}{\rho}\vec{n}_0 = \dfrac{4.58^2}{50}\vec{n}_0 =$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{κεντρ} = \frac{20.97}{50}\vec{n}_0 = 0.42\, \vec{n}_0\ (m/s^2)$$

Οπότε το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης θα είναι:

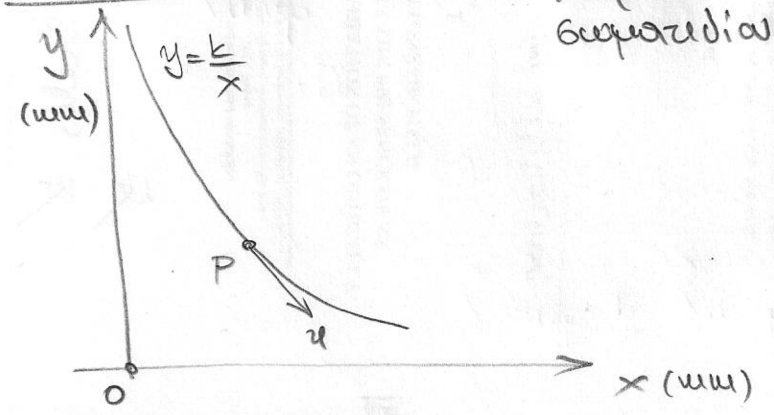
$$|\vec{\alpha}_{total}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{επιτρ}^{\,2} + \vec{\alpha}_{κεντρ}^{\,2}} = \sqrt{0.25 + 0.18} = 0.65\ m/s^2$$

$\boxed{\text{Άσκηση 34}}$ (Φυλ. 20)

Σωματίδιο (υλικό σημείο) κινείται με σταθερή ταχύτητα $|\vec{u}| = 300\ mm/s$ κατά μήκος μιας καμπύλης $y = \frac{k}{x}$, $k = 20 \times 10^3\ mm^2$ (βλέπε Σχήμα). Να υπολογιστεί το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου όταν αυτό βρίσκεται στη θέση $x = 200\ mm$.

Λύση.

Σχηματικά



Η τροχιά του σωματιδίου: $y = \frac{k}{x}$. Παραγωγίζοντας ως προς x και έχω ότι: $y'(x) = \frac{d}{dx} y(x) =$

$= -\frac{k}{x^2}$, $y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{2k}{x^3}$

όπου $k = 20 \times 10^3\ mm^2$

Η ακτίνα καμπυλότητας, ρ, στο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{\left(1 + y'(x)^2\right)^3}}{y''(x)} \qquad (1)$$

Θα υπολογίσω το μέτρο της ταχύτητας. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας θ στο σημείο P θα ισούται με $y'(x) = \frac{-k}{x^2}$

Δηλαδή: $\tan\theta = y'(x) \Rightarrow \tan\theta = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow \theta(x) = \arctan\left(-\frac{k}{x^2}\right)$

Οπότε για $x = 200\ mm = 0.2m$ έχουμε ότι $\boxed{\theta(x) = \Big|_{x = 0.2m} -26.56^\circ}$

Από (1) υπολογίζω την ακτίνα καμπυλότητας και έχουμε ότι:

$\rho(\underset{0.2m}{\underset{\parallel}{x = 200\ mm}}) = 0.0088m$

Το μέτρο της ταχύτητας

Οπότε $\vec{\alpha}_{κεντρ.} = \frac{|\vec{u}|^2}{\rho(x)} \vec{u}_0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 = |u_x|^2 + |u_y|^2 \Rightarrow \vec{\alpha}_{κεντρ} = \begin{pmatrix} u_x^2/\rho \\ u_y^2/\rho \end{pmatrix} \Rightarrow$

στις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\dot{y}\sin\theta}{\rho} \\ \dfrac{\dot{y}\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\left(-\dfrac{k}{x^2}\right)\sin\theta}{\rho} \\ \dfrac{-\dfrac{k}{x^2}\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\Big|_{x=0.2m} = \begin{pmatrix} 144 \\ 288 \end{pmatrix} \frac{mm}{s^2} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.288 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Οπότε το $|\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}| = \sqrt{0.144^2 + 0.288^2} = 0.322\ m/s^2$ ή $322\ mm/s^2$

$$|\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}| = \sqrt{|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2}$$

Τελικά: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}^{\,2} + \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}^{\,2}}$, όμως $\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}$ είναι μηδέν γιατί από δοσμένα έχουμε ότι το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα $|\vec{u}| = $ σταθερή $\Rightarrow |\dot{\vec{u}}| = 0 \Rightarrow$

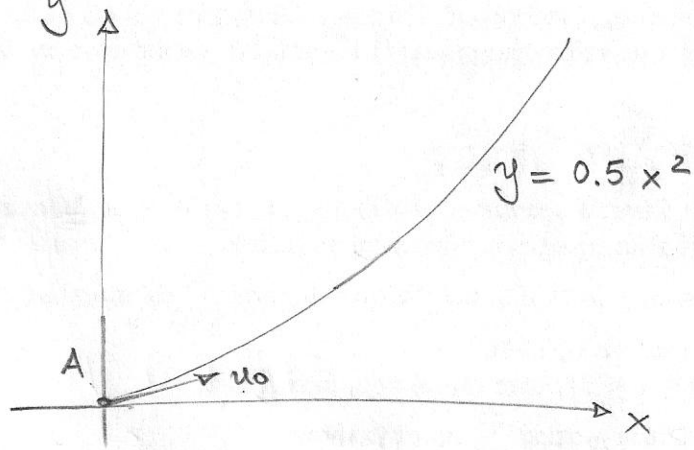
$\Rightarrow \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} = 0$, επομένως $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}^{\,2} + 0} = 322\ mm/s^2$

Άσκηση 35 (Φυλ. 21)

Υλικό σημείο όταν βρίσκεται στο σημείο, A, κινείται με μέτρο ταχύτητας $|\vec{u}_0| = 1\,m/s$ (Σχήμα). Αν το μέτρο της ταχύτητας του αυξάνει με ρυθμό $d|\vec{u}|/dt = 0.1\,m/s^2$ να υπολογιστούν τα μέτρα της ταχύτητα και της επιτάχυνση την χρονική στιγμή $t = 5s$.

Λύση

Σχηματικά:



Η καμπύλη στην οποία κινείται το υλικό σημείο είναι η: $y(x) = kx^2$, οπότε $y'(x) = 2kx$ και $y''(x) = 2k$, όπου $k = 0.5$

Η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από την σχέση:

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{(1+y'(x)^2)^3}}{y''(x)} \cdot \quad \frac{d|\vec{u}|}{dt} = 0.1 \Rightarrow d|\vec{u}| = 0.1\,dt \Rightarrow$$

ολοκληρ. $\Rightarrow$ (όπου $|\vec{u}| = u$) $\displaystyle\int_{u_0}^{u_1} du = \int_{t_0}^{t_1} 0.1\,dt \Rightarrow u_1 - u_0 = 0.1t - 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 = 0.1t + u_0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |\vec{u}| = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = |u|dt \overset{\text{ολοκληρ.}}{\Rightarrow} S = u_0 t + \frac{1}{2}0.1t^2$ (2)

Από (1) κ' (2) έχω ότι $\boxed{u_1 = 1.5\,m/s}$, $S_1 = 6.25\,m$ για $t = 5s$.

Η επιτρόχιος είναι $\vec{\alpha}_{επ} = \frac{d|\vec{u}|}{dt}\vec{\varepsilon}_0 = 0.1\vec{\varepsilon}_0$ κ' η κεντρομόλος $|\vec{\alpha}_{κεντρ}|\vec{n}_0 = \frac{|\vec{u}|^2}{\rho(x)}\vec{n}_0$

$\Rightarrow |\vec{\alpha}_{κεντρ}| = \frac{1.5^2}{\rho(x_1)}$ (Το x_1 υπολογίζεται από το $S_1 = \int_0^{x_1}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$, και από εκεί υπολογίζω το $\rho(x_1)$)

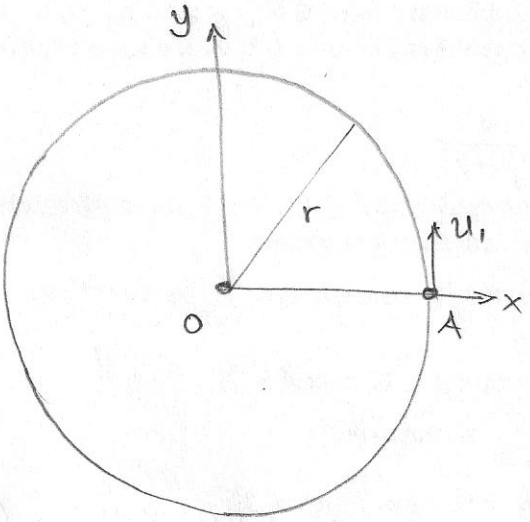
Το μέτρο της επιτάχυνσης $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{επιτρ}^{\,2} + \vec{\alpha}_{κεντρ}^{\,2}} \Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}| = 0.117\,m/s^2}$

Άσκηση 36 (Φυλ. 22)

Υλικό σημείο κινείται σε τμήμα της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r. Όταν η γωνία θ στις πολικές είναι θ=0 και στο σημείο αυτό το υλικό σημείο είναι στο σημείο A έχει ταχύτητας μέτρο $|\vec{u}_1| = 2\ m/s$. Ο ρυθμός μεταβ. του μέτρου της ταχύτητας είναι $\frac{d|\vec{u}|}{dt} = 0.002S$. Να υπολογιστούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του όταν το υλικό σημείο έχει διανύσει τα τρία τέταρτα του κύκλου. ($r = 500\ m$)

Λύση

Σχηματικά:



$$S_1 = \frac{3}{4}2\pi r \qquad \alpha_{επιτρ} = \frac{d|\vec{u}|}{dt} = \frac{d|\vec{u}|}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\vec{u}|} = kS \Rightarrow (\text{όπου } k = 0.002)$$

$$\Rightarrow \frac{d|\vec{u}|}{ds}|\vec{u}| = kS \Rightarrow |\vec{u}|d|\vec{u}| = kS\,dS$$

ολοκληρώνω:

$$\int_{|\vec{u}_1|}^{|\vec{u}_2|} |\vec{u}|d|\vec{u}| = \int_{S_1=0}^{S_2} kS\,dS \quad \left(\text{όπου } |\vec{u}| = u\right) \Rightarrow \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{k}{2}S_1^2 - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2^2 = kS_2^2 + u_1^2 \Rightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{k\left(\frac{3\pi r}{2}\right)^2 + u_1^2}} \Rightarrow \boxed{u_2 = 105.4\ m/s}$$

$$\vec{\alpha}_{επιτρ} = kS\vec{\varepsilon}_0 = 4.71\vec{\varepsilon}_0\ (m/s^2)$$

$$\vec{\alpha}_{κεντρ} = \frac{|u_2|^2}{r}\eta_0 = 22.22\,\eta_0\ (m/s^2)$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}_{επιτρ}^2 + \vec{\alpha}_{κεντρ}^2} = \sqrt{4.71^2 + 22.22^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}| = 22.7\ m/s^2}$$

Άσκηση 37 (Φυλ. 23)

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου δίνονται από τις σχέσεις:

$$x=t^2 \text{ και } y=t^4-2t^2-3$$

α) Να γραφεί η εξίσωση τροχιάς του ως $y=y(x)$ και να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του τη χρονική στιγμή $t=2s$.

β) Να υπολογιστούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή.

Λύση

Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς ως $y=y(x)$ πρέπει να απαλείψουμε το χρόνο t από τις δοθείσες σχέσεις $x(t)$ και $y(t)$. Οπότε η εξίσωση της τροχιάς είναι: $y=x^2-2x-3$, η οποία παριστάνει παραβολή.

Η ταχύτητα είναι:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\bar{x}_0+\frac{dy}{dt}\bar{y}_0=2t\,\bar{x}_0+(4t^3-4t)\bar{y}_0$$

με μέτρο: $|\vec{u}|=\sqrt{4t^2+(4t^3-4t)^2}$

Για $t=2s$: $\vec{u}=4\vec{x}_0+24\vec{y}_0$ και $|\vec{u}|=\sqrt{16+576}=24{,}3\ m/s$

Η επιτάχυνση είναι: $\vec{\alpha}=\frac{d\vec{u}}{dt}=2\vec{x}_0+(12t^2-4)\vec{y}_0$ με μέτρο $|\vec{\alpha}|=\sqrt{4+(12t^2-4)^2}$

Για $t=2s$: $\vec{\alpha}=2\vec{x}_0+44\vec{y}_0$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{4+1936}=\sqrt{1940}\cong 44\ m/s^2$

β) Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι:

$$\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}=\frac{d|\vec{u}|}{dt}\vec{\varepsilon}_0=\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4t^2+(4t^3-4t)^2}\right]\vec{\varepsilon}_0=$$

$$=\frac{8t+2(4t^3-4t)(12t^2-4)}{2\sqrt{4t^2+(4t^3-4t)^2}}\vec{\varepsilon}_0 \Rightarrow \vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho.}=\frac{4t+(4t^3-4t)(12t^2-4)}{\sqrt{4t^2+(4t^3-4t)^2}}\vec{\varepsilon}_0$$

Για $t=2s$: $\vec{\alpha}_{\varepsilon}=\frac{8+24\ 44}{\sqrt{16+24^2}}\vec{\varepsilon}_0=\frac{1064}{\sqrt{592}}\vec{\varepsilon}_0=43{,}8\vec{\varepsilon}_0\ m/s^2$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2s$ βρίσκεται από:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\vec{\alpha}_{επιτρ})^2 + (\vec{\alpha}_{κεντρομ})^2} \Rightarrow \sqrt{1940} = \sqrt{(\vec{\alpha}_{επιτρ})^2 + (\vec{\alpha}_{κεντρ})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1940 = 1918,44 + (\vec{\alpha}_{κεντρ})^2 \Rightarrow (\vec{\alpha}_{κεντ})^2 = 21,56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}_{κεντρ}| = 4.64 \ m/s^2 \Rightarrow \vec{\alpha}_{κεντρ} = 4.64 \vec{\eta}_0 \ (m/s^2)$$

Άσκηση 38

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σώματος είναι:

$$x = 2t^3 - 3t^2 \quad \text{και} \quad y = t^2 - 2t + 1$$

α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματίου του χρόνου

β) Για ποιές τιμές του χρόνου η ταχύτητα μηδενίζεται;

γ) Για ποιές τιμές του χρόνου η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα των y;

δ) Να βρεθούν η επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=0$.

Λύση

α) $$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{x_0} + \frac{dy}{dt}\vec{y_0} = (6t^2 - 6t)\vec{x_0} + (2t-2)\vec{y_0}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{u}}{dt} = (12t - 6)\vec{x_0} + 2\vec{y_0}$$

β) Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν είναι $u_x = 0$ και $u_y = 0$. Δηλαδή:

$$u_x = 0 \Rightarrow 6t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 6t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0\,s \\ \text{ή} \\ t = 1\,s \end{cases}$$

$$u_y = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1\,s$$

Άρα για $t = 1\,s$ η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι μηδέν.

γ) Η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y όταν:

$$\alpha_x = 0 \Rightarrow 12t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{6}{12} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\,s$$

δ) Το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{36t^2(t-1)^2 + 4(t-1)^2} = \sqrt{(t-1)^2(36t^2+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = (t-1)\sqrt{36t^2+4}$$

Άρα η επιτρόχια επιτάχυνση είναι:

$$\vec{\alpha}_{επιτρ.} = \frac{d|\vec{u}|}{dt}\vec{\varepsilon_0} = \left(\sqrt{36t^2+4} + \frac{(t-1)\,72t}{2\sqrt{36t^2+4}}\right)\vec{\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{(t-1)(36t^2+4)+(t-1)^2 36t}{(t-1)\sqrt{36t^2+4}}\vec{\varepsilon}_o$$

Για $t=0$: $\vec{\alpha}_{επιτρ.} = \frac{-4}{-2}\vec{\varepsilon}_o = 2\vec{\varepsilon}_o \ m/s^2$

Το μέτρο της επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}$, στις καρτεσιανές συντεταγμένες είναι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\vec{\alpha}_x)^2+(\vec{\alpha}_y)^2} =$

$$= \sqrt{(12t-6)^2+4}$$

Για $t=0$: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{40} \ m/s^2$

Επομένως: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\vec{\alpha}_{κεντρ})^2+(\vec{\alpha}_{επιτρ})^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = (\vec{\alpha}_{κεντρ})^2+(\vec{\alpha}_{επιτρ})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{\alpha}_{κεντρ})^2 = |\vec{\alpha}|^2 - (\vec{\alpha}_{επιτρ})^2 = 40-4 = 36 \Rightarrow \vec{\alpha}_{κεντρ} = 6\vec{\varepsilon}_o \ m/s^2$

Άσκηση 39 (Φυλ. 24)

Σωματίδιο κινείται επιταχυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας, R, με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση.

α) Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται ώστε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας $\vec{u}$, και της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$, να γίνει φ.

β) Να βρεθεί το διάστημα S, που διανύει το σωματίδιο σε αυτό το χρονικό διάστημα. (αρχικά για $t=0$, $|\vec{u}|=0$)

Λύση

α) Από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{\alpha}$ προκύπτει:

$$\vec{u}\cdot\vec{\alpha} = |\vec{u}||\vec{\alpha}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{επιτρ} + \vec{\alpha}_{κεντρ.} \qquad (2)$$

Οπότε:

$$\vec{u}\cdot\vec{\alpha} = \vec{u}\cdot(\vec{\alpha}_{επιτρ} + \vec{\alpha}_{κεντρ}) = \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{επιτρ} + \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{κεντρ} =$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{επιτρ.}, \text{ αφού } \vec{u}\perp\vec{\alpha}_{κεντρ} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{κεντρ} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\alpha} = \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{επιτρ} = |\vec{u}||\vec{\alpha}_{επιτρ}|\cos(0) \text{ αφού } \vec{u}\,//\,\vec{\alpha}_{επιτρ}.$$

Άρα από (1) κ' (2): $|\vec{u}||\vec{\alpha}_{επιτρ}| = |\vec{u}||\vec{\alpha}|\cos\varphi \Rightarrow |\vec{\alpha}_{επιτρ}| = |\vec{\alpha}|\cos\varphi$

όπου φ η γωνία μεταξύ $\vec{u}$ και $\vec{\alpha}$. (3)

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\vec{\alpha}_{κεντρ})^2 + (\vec{\alpha}_{επιτρ})^2} = \sqrt{\frac{|\vec{u}|^4}{R^2} + (\vec{\alpha}_{επιτρ})^2}$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή, t, που η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{u}$ κ' $\vec{\alpha}$ γίνεται φ υπολογίζεται μέσω της επιτρόχιας επιτάχυνσης:

$$\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}=\frac{d|\vec{u}|}{dt}\vec{\varepsilon}_0=|\dot{\vec{u}}|\vec{\varepsilon}_0\Rightarrow\int_0^u du=|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|\int_0^t dt\Rightarrow|\vec{u}|=|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|t$$

Ισχύει ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho})^2+(\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho})^2}=\sqrt{\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^4t^4}{R^2}+|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2}\Rightarrow$ (3)

$$\Rightarrow|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|=\sqrt{\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^4t^4}{R^2}+|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2}\cos\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2=\left(\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^4t^4}{R^2}+|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2\right)\cos^2\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\left(\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2t^4}{R^2}+1\right)\cos^2\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2t^4}{R^2}=\frac{1}{\cos^2\varphi}-1=\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2t^4}{R^2}=\tan^2\varphi\Rightarrow t^4=\frac{R^2\tan^2\varphi}{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|^2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{R\tan\varphi}{|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|}}\quad(4)$$

β) Επειδή η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι σταθερή η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από την σχέση:

$$\frac{d|\vec{u}|}{dt}=|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|=\sigma\tau\alpha\theta\Rightarrow\int d|\vec{u}|=\int|\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|dt\Rightarrow|\vec{u}|=|\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|t+c$$

(για $t=0$, $|\vec{u}|=0$, άρα $c=0$) άρα $|\vec{u}|=|\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|t$ (5)

Οπότε από τον ορισμό της ταχύτητας ισχύει ότι:

$$|\vec{u}(t)|=\frac{dS}{dt}\Rightarrow dS=|\vec{u}(t)|dt\overset{(5)}{\Rightarrow}\int_0^S dS=|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|\int_0^t t\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=|\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}|\frac{t^2}{2}\overset{(4)}{\Rightarrow}S=\frac{R\tan\phi}{2}.$$

$\boxed{\text{Άσκηση 40}}$ (Φυλ. 25)

Η τροχιά υλικού σημείου είναι:

$$\vec{r}(t) = (t^3-4t)\,\bar{x}_0 + (t^2+4t)\,\bar{y}_0 + (8t^2-3t^3)\,\bar{z}_0$$

Να βρεθούν τα μέτρα της εφαπτομενικής και της κεντρομόλου επιτάχυνσης όταν $t=2\,s$.

λύση

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2-4t)\,\bar{x}_0 + (2t+4)\,\bar{y}_0 + (16t+9t^2)\,\bar{z}_0$$

οπότε $|\vec{u}| = \sqrt{(3t^2-4)^2+(2t+4)^2+(16t+9t^2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{2t(45t^3-144t^2+142t+8)}} \quad (1)$$

$$|\dot{\vec{u}}| = \frac{d}{dt}|\vec{u}| = \frac{t(135t^2-288t+142)+45t^3-144t^2+142t+8}{\sqrt{2t(45t^3-144t^2+142t+8)}}$$

και για $t=2s \Rightarrow \boxed{|\dot{\vec{u}}| = 16.52\ m/s^2}$ (2)

$$|\vec{\alpha}|_{\text{καρτεσιανής}} = \sqrt{(\dot{u}_x)^2+(\dot{u}_y)^2+(\dot{u}_z)^2} =$$

$$= \sqrt{(6t)^2+2^2+(16-8t)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{\alpha}|_{\text{καρτεσ.}} = \sqrt{360t^2-576t+260}$ όμως $|\vec{\alpha}|_{\text{καρτεσ.}} = |\vec{\alpha}|_{\text{φυσικ.}}$

και για $t=2s$: $|\vec{\alpha}|_{\text{καρτεσ.}} = |\vec{\alpha}|_{\text{φυσικής}} = 23.41\ m/s^2$ (3)

όμως $|\vec{\alpha}|_{\text{φυσικής}} = 23.41 = \sqrt{|\dot{\vec{u}}|^2 + \frac{|\vec{u}|^4}{\rho^2}} \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} 23.41^2 =$

$= 16.52^2 + \frac{|\vec{u}|^4}{\rho^2}$, από σχέση (1) για $t=2s$: $|\vec{u}| = 17.44\ m/s$

Οπότε: $548.03 - 272.58 = \dfrac{17.44^4}{\rho^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2 = \dfrac{92416}{275.45} \Rightarrow \rho = 335.51m$ (η αρνητική τιμή απορρίπτεται)

Επομένως: $\alpha_{επιτροχ} = |\dot{\vec{u}}| = 16.52\ m/s^2$, για $t=2s$

και $\alpha_{κεντρομ} = \dfrac{|\vec{u}|^2}{\rho} = \dfrac{(17.44)^2}{335.51} = 0.9\ m/s^2$, για $t=2s$

Άσκηση 41 (Φυλ. 26)

Έστω ότι η θέση ενός υλικού σημείου περιγράφεται από τις πολικές συντεταγμένες $r=\alpha(1+\sin bt)$ και $\theta=ce^{dt}$ (όπου $\alpha=4m$, $b=1\ 1/s$, $c=2\,rad$, $d=-1\ 1/s$)

Να υπολογισθούν οι ακτινικές και εγκάρσιες συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου όταν $t=2s$.

Λύση

Η τροχιά του υλικού σημείου είναι:

$$\begin{cases} r=\alpha(1+\sin(bt)) \\ \theta=ce^{dt} \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχω: $\dot{r}=\alpha b\cos(bt)$, $\dot{\theta}=cde^{dt}$

Επίσης παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο: $\ddot{r}=-\alpha b^2\sin(bt)$, $\ddot{\theta}=cd^2e^{dt}$

Αλλά είναι γνωστό ότι:

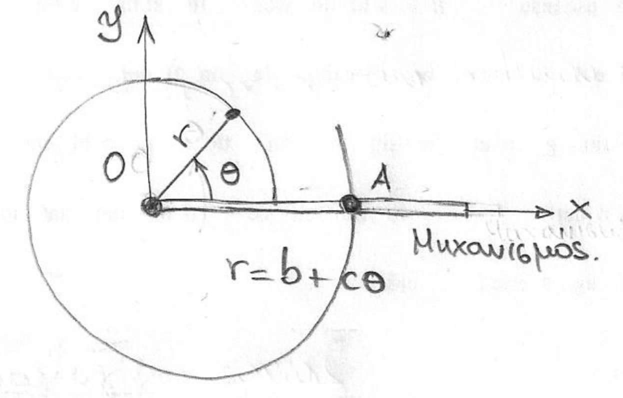
$$u_r=\dot{r}\ ,\ u_\theta=r\dot{\theta} \Rightarrow u_r=-1.66\ m/s\ ,\ u_\theta=-2.07\ m/s$$

$$\alpha_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\ ,\ \alpha_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_r=-4.20\ m/s^2, \\ \alpha_\theta=2.97\ m/s^2\end{cases}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 42}}$ (Φυλ. 27)

Ο μηχανισμός του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο το Ο με σταθερό ρυθμό $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Να υπολογισθούν οι ακτινικές και εγκάρσιες συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Α όταν $\theta = 2\pi$ rad. Η τροχιά του Α περιγράφεται από την εξίσωση $r = b + c\theta$ $(b>0, c>0)$, όπου η θ μετριέται σε rads $\left(b = 5\,\text{cm} \text{ και } c = \frac{1}{\pi}\,\text{cm}\right)$.

Σχηματικά:



Λύση

Η τροχιά του υλικού σημείου Α, είναι η: $r = b + c\theta$.

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε ότι: $\dot{r} = c\dot{\theta}$. Παραγωγίζοντας ξανά ως προς t: $\ddot{r} = c\ddot{\theta}$ όμως το $\ddot{\theta} = 0\ \text{rad}/\text{s}^2$ οπότε το $\ddot{r} = 0\ \text{cm}/\text{s}^2$.

Είναι γνωστό ότι: $u_r = \dot{r}$, $u_\theta = r\dot{\theta}$ άρα $u_r = 0.955\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ και αντίστοιχα $u_\theta = 21\ \text{cm}/\text{s}$

Επίσης: $\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ και $\alpha_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

οπότε $\alpha_r = -63\ \text{cm}/\text{s}^2$ και $\alpha_\theta = 5.73\ \text{cm}/\text{s}^2$

Παρατήρηση

Ισχύει για κάθε τιμή της γωνίας θ και όχι μόνο για $\theta = 2\pi$ rad.

Άσκηση 43

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο. Η ταχύτητα του σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{u} = 4r^2\theta\,\vec{r_0} + 8r^3\vec{\theta_0}$$

Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ($r=r(\theta)$), όταν για $r=3$, $\theta=\frac{\pi}{8}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι στις πολικές η ταχύτητα $\vec{u}$ δίνεται από:

$$\vec{u} = u_r\vec{r_0} + u_\theta\vec{\theta_0}$$

όπου: $\begin{cases} u_r = \dot{r} = 4r^2\theta \quad (*) \\ u_\theta = r\dot{\theta} = 8r^3 \Rightarrow \dot{\theta} = 8r^2 \quad ① \end{cases}$

Ισχύει ότι: $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \xRightarrow{\text{από } (*)} 4r^2\theta = \dfrac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \Rightarrow$

$$\xRightarrow{①} \cancel{4r^2}\theta = \frac{dr}{d\theta}\cancel{8r^2}^{\,2} \Rightarrow \theta = \frac{dr}{d\theta}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta d\theta = 2dr \Rightarrow \int\theta d\theta = 2\int dr \Rightarrow \frac{\theta^2}{2} = 2r + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\theta^2}{4} + c_1 \Rightarrow r(\theta) = \frac{\theta^2}{4} + c_1$$

Για να υπολογίσω την c_1: $r\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{64} + c_1 \Rightarrow 3 = \frac{\pi^2}{256} + c_1 \Rightarrow c_1 = 3 - \frac{\pi^2}{256}$$

Οπότε:

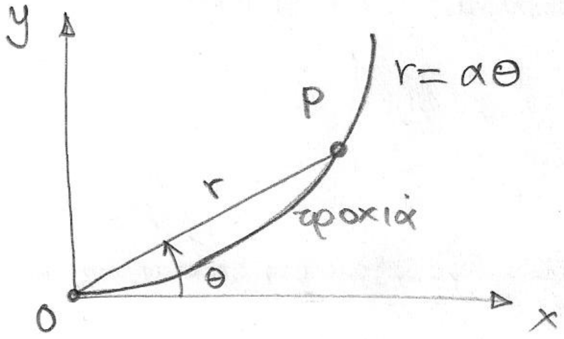
$$\boxed{r(\theta) = \frac{\theta^2}{4} + 3 - \frac{\pi^2}{256}}$$

Άσκηση 44 (Φυλ. 28)

Η τροχιά υλικού σημείου είναι της μορφής $r=\alpha\theta$, $\alpha=0.4\,m$. Η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}=3\,rad/s$. Η γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}=8\,rad/s^2$ (Σχήμα). Να βρεθούν οι ακτινικές και εγκάρσιες συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου όταν $\theta=\frac{\pi}{3}\,rad$.

Λύση

Σχηματικά:



Η τροχιά του υλικού σημείου είναι $r=\alpha\theta$. Παραγωγίζω ως προς t

οπότε $\dot{r}=\alpha\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{dr}{dt}=\alpha\dfrac{d\theta}{dt}$ (1)

παραγωγίζω ξανά ως προς t

οπότε $\ddot{r}=\alpha\ddot{\theta}$. (2)

Ισχύει ότι: $\left\{\begin{array}{l} u_r=\dot{r} \\ u_\theta=r\dot{\theta} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$u_r=\alpha\dot{\theta}=1.2\,m/s$
$u_\theta=r\dot{\theta}=\alpha\theta\dot{\theta}=1.257\,m/s$

$$\alpha_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \overset{(2)}{=} \alpha\ddot{\theta}-r\dot{\theta}^2=\alpha\ddot{\theta}-\alpha\theta\dot{\theta}^2=-0.57\,m/s^2$$

$$\alpha_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=2\alpha\dot{\theta}\dot{\theta}+\alpha\theta\ddot{\theta}=2\alpha\dot{\theta}^2+\alpha\theta\ddot{\theta}=10.55\,m/s^2$$

Άσκηση 45

Υλικό σημείο κινείται σε καμπύλη, που δίνεται από τη σχέση

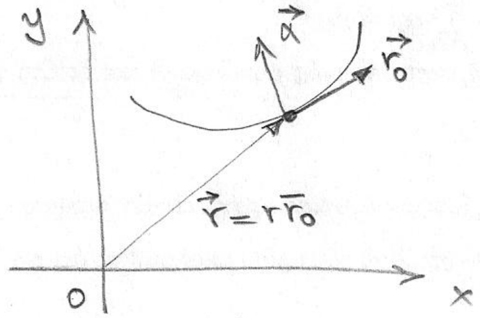
$$r = 2\alpha\cos\theta$$

όπου r, θ πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο και α σταθερά. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα θέσης. Να δειχθεί ότι η εγκάρσια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι αντιστρόφως ανάλογη της ποσότητας $\sin^5\theta$.

Λύση

Επειδή η διεύθυνση της επιτάχυνσης είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης, η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης θα ισούται με μηδέν.

Σχηματικά:



Δηλαδή, $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ (1) (ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης)

($\dot{\theta} > 0$) αυστηρά θετικό

Επειδή $r = 2\alpha\cos\theta$ η σχέση (1) δίνει:

$$-2\alpha\sin\theta\,\ddot{\theta} - 4\alpha\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\cot\theta\,\dot{\theta} \quad \text{ή} \quad \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\cot\theta\,d\theta \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) λαμβάνουμε:

$$\ln\dot{\theta} = -2\ln(\sin\theta) + \ln c, \quad \text{όπου } c = \text{σταθερά} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{\sin^5\theta}. \quad (3)$$

Η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας ως γνωστό ισούται με:

από άσκηση

$$\alpha_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \left(r = 2\alpha\cos\theta \quad \text{και} \quad (3) \right) \Rightarrow$$

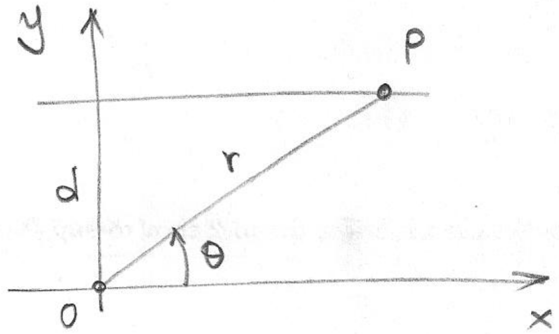
$$\Rightarrow \boxed{\alpha_\theta = -\frac{4\alpha c^2}{\sin^5\theta}}$$

Άσκηση 46 (Φυλ. 29)

Υλικό σημείο P, κινείται σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των x. Η ευθεία βρίσκεται σε απόσταση d, από τον άξονα των x. Η γωνιακή ταχύτητα, ω, του υλικού σημείου ως προς την αρχή O είναι σταθερή ($\omega = \dot{\theta} =$ σταθερή).

Ζητούνται οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σε πολικές συντεταγμένες.

Σχηματικά:



Λύση

Είναι $\dot{\theta} =$ σταθ $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ (1)

Η τροχιά του υλικού σημείου P, είναι: $r = \dfrac{d}{\sin\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{r} = -d\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -d\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\omega \Rightarrow \ddot{r} = d\omega^2\,\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^3\theta} \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_r = \dot{r} \quad \text{και} \quad u_\theta = r\dot{\theta} \xrightarrow[(2)]{(1)} \begin{cases} u_r = -d\omega\,\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ u_\theta = \dfrac{d\omega}{\sin\theta} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι γενικά οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις

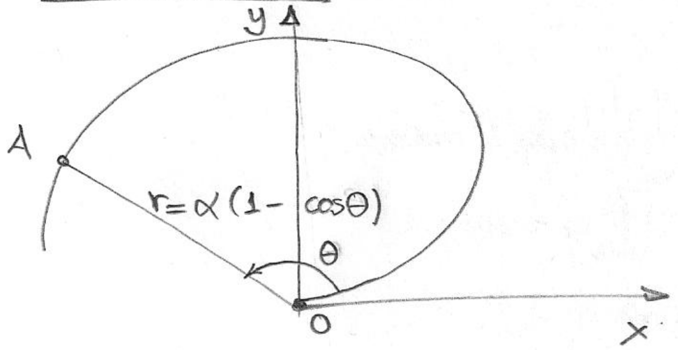
$$\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad \alpha_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \xrightarrow[(2)]{(1)} \begin{cases} \alpha_r = d\omega^2\,\dfrac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta} \\ \alpha_\theta = -d\omega^2\,\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} \end{cases}$$

Άσκηση 47 (φυλ. 30)

Υλικό σημείο διαγράφει την τροχιά $r = \alpha(1-\cos\theta)$. Να υπολογισθούν το μέτρο της ταχύτητας και το μέτρο της επιτάχυνσης όταν $\theta = 120$ degrees και η γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου είναι $\dot{\theta} = 2\ \frac{rad}{s}$ και η γωνιακή του επιτάχυνση $\ddot{\theta} = 0.2\ \frac{rad}{s^2}$ (όπου $\alpha = 25\,m$)

Λύση

Σχηματικά



Η τροχιά του υλικού σημείου είναι: $r = \alpha(1-\cos\theta)$

Μετατροπή της γωνίας θ από μοίρες σε ακτίνια (rads)

$$\theta = 120^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

Το μέτρο της ταχύτητας σε πολικές είναι: $|\vec{u}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$ (1)

όπου $\dot{r} = \alpha \sin\theta\, \dot{\theta}$ και $\ddot{r} = \alpha \sin\theta\, \ddot{\theta} + \alpha\cos\theta\, \dot{\theta}^2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sqrt{\alpha^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = \sqrt{(\alpha^2\sin^2\theta + r^2)\,\dot{\theta}^2} \xRightarrow[r=\alpha(1-\cos\theta)]{\dot{\theta} = 2\frac{rad}{s}}$$

$\Rightarrow |\vec{u}| = 86.6\ m/s$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \xRightarrow{\ddot{\theta} = 0.2\frac{rad}{s^2}} |\vec{\alpha}| = 266\ m/s^2$$

$r = \alpha(1-\cos\theta)$

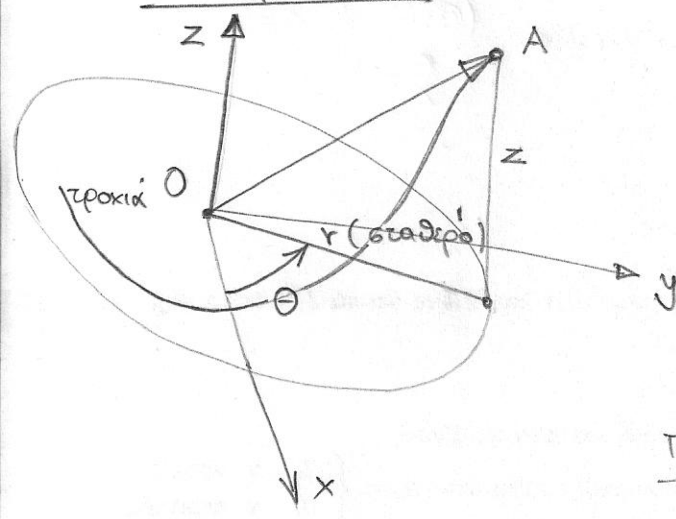
$\dot{r} = \alpha\sin\theta\,\dot{\theta}$

$\ddot{r} = \alpha\sin\theta\,\ddot{\theta} + \alpha\cos\theta\,\dot{\theta}^2$

Άσκηση 48 (Φυλ. 31)

Υλικό σημείο A κινείται στο χώρο. Η απόσταση της προβολής του υλικού σημείου στο επίπεδο Oxy από την αρχή των αξόνων είναι ίση με r και παραμένει σταθερή (Σχήμα). Η συνιστώσα z της τροχιάς του είναι $z = \alpha \sin b\theta$, όπου $\alpha = 3m$ και $b=4$. Αν η γωνία θ είναι της μορφής $\theta = ct$, όπου $c = 0.5\ rad/s$ να βρεθούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου A, (για $r=3m$, $t=3s$).

Σχηματικά



Λύση

Η τροχιά του υλικού σημείου A είναι:

$$\begin{cases} r = \text{σταθ.} \\ \theta = ct, & c = 0.5\ rad/s \\ z = \alpha \sin b\theta, & b = 4 \end{cases}$$

Οπότε:

$r = r$, $\theta = ct$ και $z = \alpha \sin(bct)$ (1)

Παραγωγίζοντας την (1):

$\dot r = 0$, $\dot\theta = c$, $\dot z = \alpha b c \cos(bct)$ (2)

Παραγωγίζοντας την (2)

$\ddot r = 0$, $\ddot\theta = 0$, $\ddot z = -\alpha b^2 c^2 \sin(bct)$ (3)

Το μέτρο της ταχύτητας, $|\vec u| = \sqrt{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2 + \dot z^2} =$

$= \sqrt{0 + (rc)^2 + (\alpha b c \cos(bct))^2} = \sqrt{r^2c^2 + (\alpha bc)^2 \cos^2(bct)} =$

$= \sqrt{0.5r + 36\cos^2(2t)} \rightarrow \boxed{|\vec u| = \sqrt{0.5r + 36\cos^2(2t)}}$

και για $r = 3m$ και $t = 3s \Rightarrow |\vec u| = 5.89\ m/s$

Το μέτρο της επιτάχυνσης, $|\vec \alpha| = \sqrt{(\cancel{\ddot r}^{\,0} - r\dot\theta^2)^2 + (r\ddot\theta^{\,0} + \cancel{2\dot r}^{\,0}\dot\theta)^2 + \ddot z^2} =$

$= \sqrt{(-r\dot\theta^2)^2 + \ddot z^2} = \sqrt{c^4 r^2 + (\alpha b^2 c^2)^2 \sin^2(bct)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{0.0625 r^2 + 144 \sin^2(2t)} \Rightarrow$$

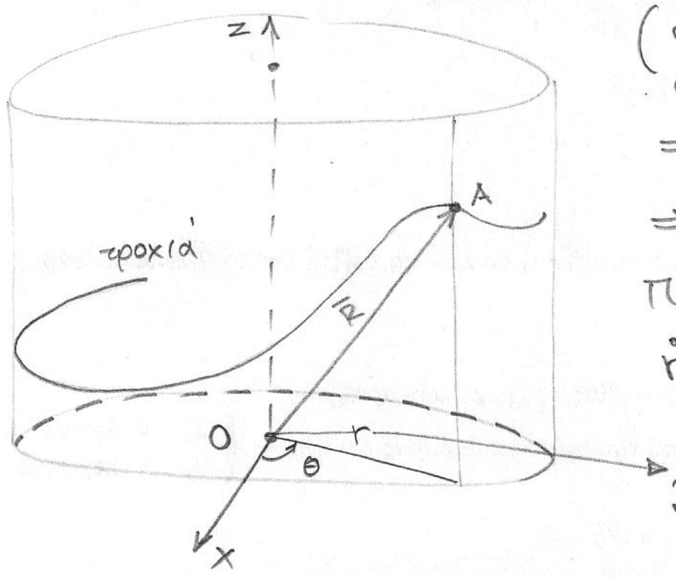
$$\Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{0.0625 r^2 + 144 \sin^2(2t)}}$$

και για $r = 3m$ και $t = 3s \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 3.436 \ m/s^2$

Άσκηση 49 (Φυλ.32)

Υλικό σημείο κινείται στον χώρο. Η απόσταση της προβολής του υλικού σημείου στο επίπεδο Oxy από την αρχή των αξόνων είναι ίση με r και ο ρυθμός μεταβολής $\dot{r}$ της παραμένει σταθερός (Σχήμα). Η συνιστώσα z της τροχιάς του υλικού σημείου είναι ίση με $z = bt^2$, $b = 4\,m/s^2$ και $\theta = ct$, $c = 0.5\,rad/s$. Να υπολογιστούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου όταν $t = 3s$ και $r = 3m$.
(όπου $\dot{r} = σταθ = 1.5\,m/s$)

Σχηματικά



Λύση

Η τροχιά του υλικού σημείου είναι:

$$r = 1.5(t-1),\quad \theta = ct,\quad z = bt^2 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} = σταθ = \alpha \Rightarrow dr = \alpha dt \Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow r = \alpha t + C, \text{ για } t = 3s,\ r = 3m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 1.5 \times 3 + C \Rightarrow C = 1.5$$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$\dot{r} = σταθ = \alpha = 1.5\,m/s,\quad \dot{\theta} = c,\quad \dot{z} = 2bt \qquad (2)$$

Παραγ. την (2) έχουμε:

$$\ddot{r} = 0,\quad \ddot{\theta} = 0,\quad \ddot{z} = 2b \qquad (3)$$

Το μέτρο της ταχύτητας $|\vec{u}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} =$

$$= \sqrt{\alpha^2 + (1.5(t-1)c)^2 + (2bt)^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\alpha^2 + 2.25(t-1)^2c^2 + 4b^2t^2}} \ \underset{\substack{\text{για } \alpha = 1.5\,m/s \\ c = 0.5, \\ b = 4 \\ t = 3s}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{582.75}\ m/s$$

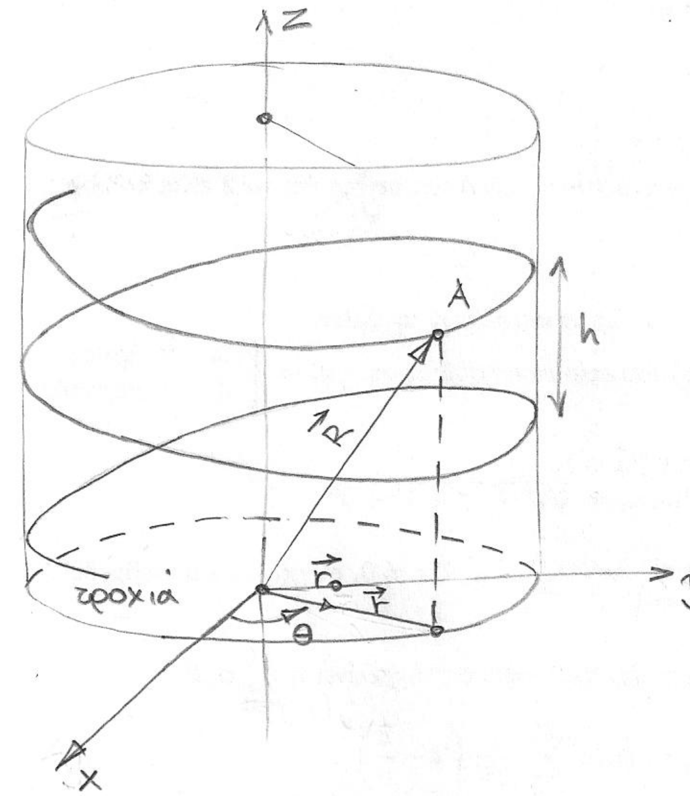
$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + \cancel{r\ddot{\theta}}^{\,0})^2 + \cancel{\ddot{z}^2}^{\,(2b)^2}} = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + 4\dot{r}^2\dot{\theta}^2 + 4b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{c^2r^2 + 4\alpha^2c^2 + 4b^2}} \ \underset{\substack{\text{για } \alpha = 1.5\,m/s \\ c = 0.5 \\ b = 4 \\ r = 1.5(t-1) \\ t = 3s}}{\Rightarrow} \ |\vec{\alpha}| = \sqrt{68.5}\ m/s^2$$

Άσκηση 50 (Φυλ. 33)

Υλικό σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{R}$ κινείται πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια της οποίας άξονας συμπίπτει με τον άξονα z. Η τομή της κυλινδρικής επιφάνειας με το επίπεδο Oxy δίνει κύκλο ακτίνας r. Το υλικό σημείο κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας, $|\vec{u}|$, και η τροχιά του ορίζεται από τις εξισώσεις: $r = $ σταθερά $= 1.5m$ και $z = -h\theta/2\pi$, όπου $h = 2m$. Να υπολογισθούν οι:
(1) γωνιακή ταχύτητα, $\dot{\theta}$, (ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ) του υλικού σημείου της προβολής του στο Oxy επίπεδο
(2) το μέτρο της επιτάχυνσης. ($|\vec{u}| = 2m/s$)

Σχήμα



Λύση

$$z = \frac{h}{2\pi}\theta \Rightarrow \dot{z} = \frac{h}{2\pi}\dot{\theta} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{h}{2\pi}\ddot{\theta} \quad (2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (*)$$

αφού $r =$ σταθ. $\Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$

άρα $|\vec{u}| = \sqrt{\cancel{\dot{r}^2}^{\,0} + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \overset{(1)}{=} \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\dot{\theta}^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\,\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{|\vec{u}|}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}} \quad (3)$$

Αν $|\vec{u}| = 2m/s$ έχουμε ότι:

$$\dot{\theta} = \frac{2}{\sqrt{2.25 + \frac{1}{9.87}}} \Rightarrow \dot{\theta} = 1.304\ rad/s$$

Το $\dot{\theta}$ είναι σταθερό από (3) (ανεξάρτητο του χρόνου, t) οπότε το $\ddot{\theta} = 0$ (4)

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(\cancel{\ddot{r}}^{\to 0} - r\dot{\theta}^2)^2 + (\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}^{\to 0} + \cancel{r\ddot{\theta}}^{\to 0})^2 + \ddot{z}^2} =$$

$$\overset{(*)}{\underset{\substack{(4)\\(2)}}{=}} \sqrt{(-r\dot{\theta}^2)^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{r^2\dot{\theta}^4 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cancel{\ddot{\theta}}^{\to 0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{r^2\dot{\theta}^4}}$$

για $r = 1.5$ και $\dot{\theta} = 1.304$ rad/s

έχουμε ότι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{1.5^2 \times 1.304^4} =$

$= 2.55$ m/s²

$\boxed{\text{Άσκηση 51}}$ (Φυλ.34)

Να υπολογιστεί η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης στη τροχιά υλικού σημείου με τη βοήθεια των κυλινδρικών συντεταγμένων.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{u} = u_r \vec{r}_0 + u_\theta \vec{\theta}_0 + u_z \vec{z}_0 = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 \qquad (1)$$

Η διανυσματική μονάδα $\vec{\varepsilon}_0$ που είναι στη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς είναι ίση με:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}} \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση του υλικού σημείου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\alpha} = \alpha_r \vec{r}_0 + \alpha_\theta \vec{\theta}_0 + \alpha_z \vec{z}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 \qquad (3)$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης θα είναι ίση με:

$$\alpha_t = \vec{\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_0$$

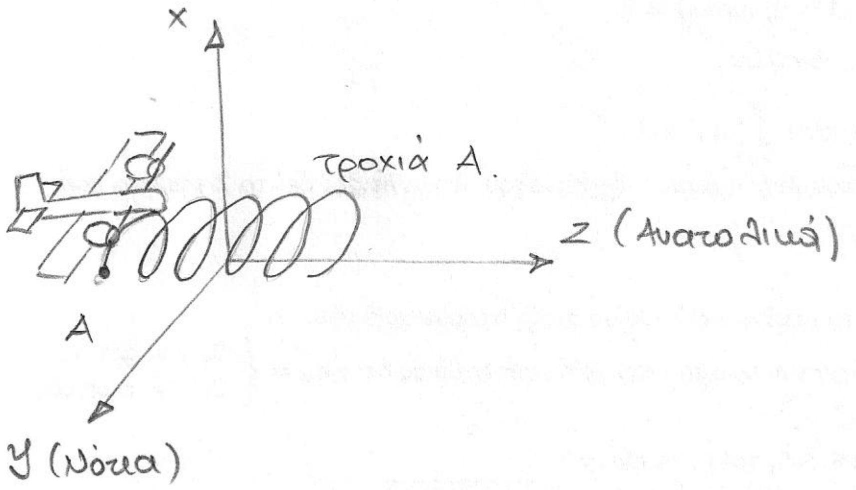
Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\varepsilon}_0$ δίνονται από τις σχέσεις (3) και (2) αντίστοιχα, άρα

$$\alpha_t = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0\right] \cdot \left[\frac{\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}\right] = \frac{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\dot{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})r\dot{\theta} + \ddot{z}\dot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}$$

Άσκηση 52 (Φυλ. 35)

Αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 180 km/h ανατολικά σε ευθεία γραμμή. Κάθε μια προπέλα του αεροπλάνου έχει διάμετρο 12m και περιστρέφεται με 1000 στροφές το λεπτό (rpm) στη φορά του ρολογιού όπως φαίνεται από το πίσω μέρος του αεροσκάφους. Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση (σε κυλινδρικές και καρτεσιανές συντεταγμένες) του υλικού σημείου, Α, στην κορυφή της προπέλας όταν η κορυφή με το σημείο, Α, βρίσκεται σε νότια θέση (βλέπε σχήμα).

Σχηματικά



Λύση

Το σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα με τον άξονα των z προς τα ανατολικά, και τον y προς τα νότια.

Για την θέση του σημείου Α έχουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\bar{r}_0 = \bar{y}_0$ και $\bar{\theta}_0 = -\bar{x}_0$

Από την περιγραφή του προβλήματος το μέτρο της z-συνιστώσας της ταχύτητας στην άκρη της προπέλας είναι:

$$|\vec{u}_z| = |\dot{\vec{z}}| = 180\ km/h \quad \text{και} \quad \dot{\vec{z}} = 50\,\vec{z}_0 \ (\text{ανατολικά})$$
$$= 180000\ m/3600\ s = 50\ m/s$$

Το μέτρο της κάθετης συνιστώσας του υλικού σημείου Α είναι:

$$|\vec{u}_\theta| = r\dot{\theta} = \frac{12^{(m)}}{2} 1000\ (rpm)\ 2\pi/60 = 628.3\ m/s$$

και το μέτρο της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας, $|\vec{u}_r|$, είναι μηδέν αφού το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{r}_0$ έχει σταθερό μέτρο, και το σημείο Α δεν μετακινείται ως προς τον άξονα των r.
Οπότε η ταχύτητα στο σημείο Α, (στην κορυφή της προπέλας) είναι:

$$\vec{u} = u_r \vec{r_o} + u_\theta \vec{\theta_o} + u_z \vec{z_o} = 628.3\,\vec{\theta_o} + 50\,\vec{z_o}$$

(σε κυλινδρικές συντεταγμ.)

ή $\vec{u} = -628.3\,\vec{x_o} + 50\,\vec{z_o}$ (σε καρτεσιανές συντεταγμ.)

Από την εκφώνηση της άσκησης συμπεραίνουμε ότι: $\ddot{z}, \dot{r}, \ddot{r}$ και $\ddot{\theta}$ είναι μηδέν*, οπότε η επιτάχυνση του υλικού σημείου Α είναι:

$$\vec{\alpha} = (\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{r_o} + (\cancelto{0}{r\ddot{\theta}} + \cancelto{0}{2\dot{r}\dot{\theta}})\,\vec{\theta_o} + \cancelto{0}{\ddot{z}}\,\vec{z_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{r_o} = -6\left[\frac{1000\text{ rpm }(2\pi)}{60\text{ s}}\right]^2 \vec{r_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = -6\,(104.72)^2\,\vec{r_o} \Rightarrow \vec{\alpha} = -65797.67\,\vec{r_o}$$ (σε κυλινδρ. συντεταγμ.)

και $\vec{\alpha} = -65797.67\,\vec{y_o}$ (σε καρτεσιανές συντεταγμ.)